MATIÈRES A OPTION

(Option générale)

Mathématiques, Sciences physiques, Biologie

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

N.B. — 1° *Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels.*

2° *Les parties* I *et* II *sont indépendantes l'une de l'autre. La partie* III *ne peut être abordée qu'après résolution des deux premières.*

La résolution des questions 3°, 5°, 6° *et* 7° *de la partie* I *n'exige pas de façon impérative celle des questions* 1°, 2° *et* 4° *dont il sera cependant tenu compte par le correcteur.*

3° n *et* p *désignant des entiers tels que* $0 \leqslant p \leqslant n$, C_n^p *désigne le nombre de parties à* p *éléments d'un ensemble à* n *éléments.*

Les candidats peuvent, s'ils le désirent, écrire $\binom{n}{p}$ *au lieu de* C_n^p.

4° P(A) *désigne la probabilité de l'événement* A.

* * *

Tournez la page S. V. P.

1 204 1

PARTIE I

1° Soient p, q, n des entiers tels que $0 \leqslant q < p \leqslant n$. Montrer que :

$$\sum_{k=q+1}^{k=n-p+q+1} C_{n-k}^{p-q-1}\, C_{k-1}^{q} = C_n^p$$

On conseille pour traiter cette question de raisonner comme suit :

Appelons A l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et soit $X = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ un élément de A, avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$. Pour tout entier k tel que $q+1 \leqslant k \leqslant n-p+q+1$, appelons A_k l'ensemble des $X \in A$, $X = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ tels que $i_{q+1} = k$.

Calculer le cardinal de A_k et montrer que les A_k forment une partition de A.

2° A l'aide de ce qui précède, montrer que :

$$2^{2n} = \sum_{k=0}^{k=n} C_{2n-k}^{n}\, 2^k$$

On pourra commencer par montrer que $2^k = \sum_{h=0}^{h=k} C_k^h$, puis transformer $\sum_{k=0}^{k=n} C_{2n-k}^{n}\, 2^k$ en somme double et intervertir l'ordre des sommations.

3° On s'intéresse dans cette question et dans les suivantes à l'étude d'une certaine loi de probabilité, qu'on définit ci-dessous.

Un fumeur porte toujours sur lui deux boîtes d'allumettes, chacune contenant initialement n allumettes, où n désigne un entier fixe, strictement positif. Chaque fois qu'il veut une allumette, il choisit au hasard une des deux boîtes, la probabilité de choix de chaque boîte étant constante et égale à $\frac{1}{2}$, et il y prend une allumette; il jette ensuite l'allumette, après l'avoir utilisée. Inévitablement arrive un moment où, pour la première fois, il trouve une boîte vide, il la conserve néanmoins sur lui. On désigne par R_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant alors dans l'autre boîte.

Soit r un entier tel que $0 \leqslant r \leqslant n$. Calculer $p_n(r) = P(R_n = r)$.

On vérifiera que $p_n(r)$ s'exprime simplement à l'aide de C_{2n-r}^{n}.

4° Vérifier que $\sum_{r=0}^{r=n} p_n(r) = 1$. On utilisera le résultat de la question 2°.

5° Comparer $p_n(0)$ et $p_n(1)$. Montrer que, si $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $p_n(r+1) < p_n(r)$.

6° Calculer l'espérance mathématique (ou moyenne) $E(R_n)$ de R_n. On commencera pour cela par établir l'égalité :

$$2(n-r)\,p_n(r) = (2n+1)\,p_n(r+1) - (r+1)\,p_n(r+1)$$

Montrer l'existence de deux polynômes *très simples*, A et B, que l'on précisera, tels que :

$$E(R_n) = A(n)\,.\,p_n(0) + B(n)$$

7° En s'inspirant de la question précédente, calculer l'espérance mathématique de R_n^2 et la variance de R_n notées respectivement $E(R_n^2)$ et $V(R_n)$. Vérifier que :

$$V(R_n) = C(n)\,.\,p_n^2(0) + D(n)\,.\,p_n(0) + F(n),$$

où C, D et F sont des polynômes très simples, que l'on précisera.

* * *

PARTIE II

1° Soit, pour n entier positif ou nul, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

Former une relation de récurrence liant, lorsque $n \geqslant 2$, I_n et I_{n-2}. Calculer I_0 et I_1. En déduire, p désignant un entier positif ou nul, des expressions de I_{2p} et de I_{2p+1}.

Tournez la page S. V. P.

2° Montrer que, quel que soit l'entier positif ou nul n,

$$I_{n+1} < I_n.$$

En déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$$

A l'aide du résultat précédent, établir que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{[2.4.6\ldots(2p)]^2}{[1.3.5\ldots(2p-1)]^2\,(2p+1)} = \frac{\pi}{2}$$ (formule de Wallis).

3° Déduire de ce qui précède que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ et donner, lorsque $p \to +\infty$, un équivalent très simple de I_{2p} et de I_{2p+1}.

* * *

PARTIE III

Les notations sont celles de la partie I en ce qui concerne $p_n(0)$, $E(R_n)$ et $V(R_n)$, et celles de la partie II en ce qui concerne l'intégrale I_{2n}.

1° Montrer que $p_n(0)$ s'exprime simplement à l'aide de I_{2n}.

2° Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n(0)$ et donner un équivalent simple de $p_n(0)$ lorsque $n \to +\infty$.

3° Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(R_n)$ et donner un équivalent simple de $E(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

4° Déterminer $\lim_{n \to +\infty} V(R_n)$ et donner un équivalent simple de $V(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

1801

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail